

Im Labyrinth des Körpers

Lösung:

a)

- i. Wo befindet sich der Wirkstoff nach zwei Schritten? In jedem Schritt bewegt sich der Wirkstoff mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach links (L) und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach rechts (R). Bei zwei Schritten handelt es sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment. Abbildung 2 stellt das Zufallsexperiment mit Hilfe eines Baumdiagramms dar.

Um das Target nach zwei Schritten zu erreichen, muss sich der Wirkstoff zwei Schritte nach links bewegen. Der entsprechende Pfad im Baumdiagramm ist grün gefärbt. Die Wahrscheinlichkeit berechnest du, indem du die Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades multiplizierst:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Um das Off-Target nach zwei Schritten zu erreichen, muss sich der Wirkstoff zwei Schritte nach rechts bewegen. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt ebenfalls

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

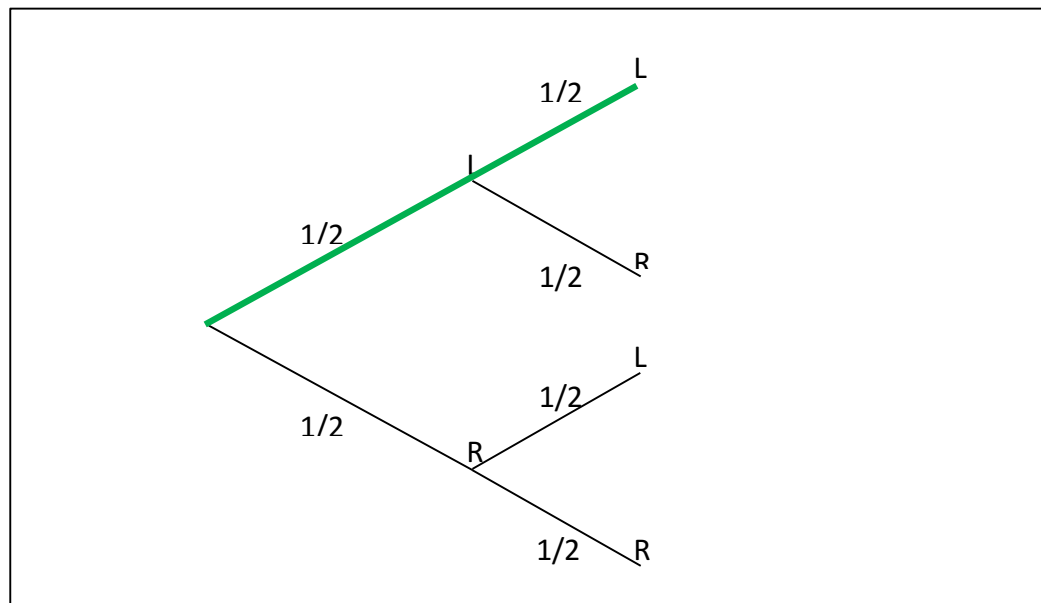


Abbildung 2: Mit Hilfe eines Baumdiagramms lässt sich die Bewegung des Wirkstoffs bei zwei Schritten visualisieren.

Im Labyrinth des Körpers

Das Ergebnis lässt sich so zusammenfassen: Der Wirkstoff erreicht nach zwei Schritten sowohl Target als auch Off-Target mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ kehrt der Wirkstoff nach zwei Schritten zurück zum Startfeld (S). Insbesondere landet der Wirkstoff nach zwei Schritten immer auf einem dieser drei Felder. Dieses Ergebnis können wir mit Hilfe eines verkürzten Baumdiagramms festhalten:

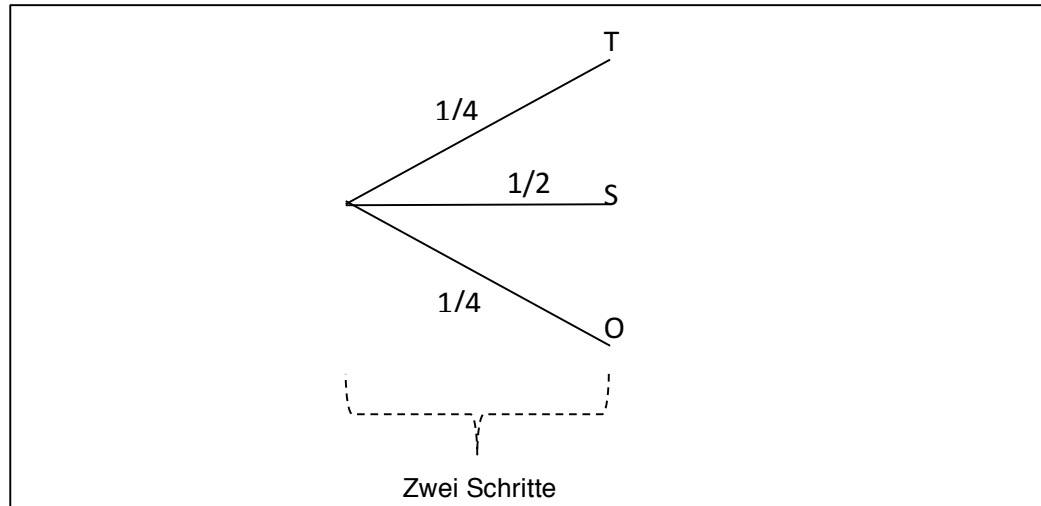


Abbildung 3: Verkürztes Baumdiagramm. Der Wirkstoff erreicht entweder das Target (T), das Off-Target (O) oder das Startfeld (S).

- ii. Wo befindet sich der Wirkstoff nach vier Schritten? Das verkürzte Baumdiagramm in Abbildung 4 stellt alle Ereignisse, die eintreten können, übersichtlich dar. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wirkstoff das Target nach vier Schritten erreicht hat? Entweder erreicht der Wirkstoff das Target bereits nach zwei Schritten. Oder der Wirkstoff kehrt nach zwei Schritten zum Startfeld zurück und erreicht mit zwei weiteren Schritten nach links das Target. Die entsprechenden Pfade sind in Abbildung 4 grün gefärbt. Für die Wahrscheinlichkeit erhältst du:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Im Labyrinth des Körpers

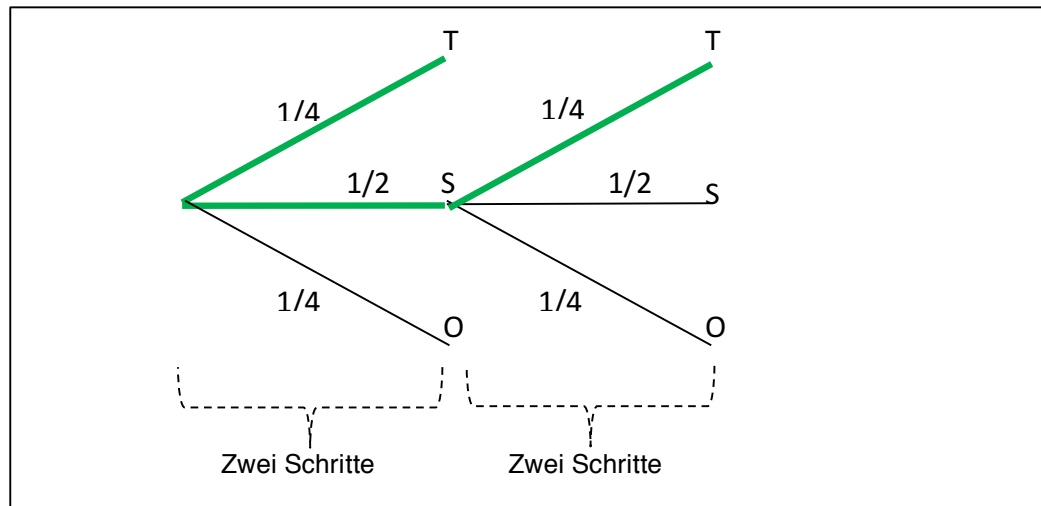


Abbildung 4: Verkürztes Baumdiagramm für vier Schritte.

Entsprechend erreicht der Wirkstoff nach vier Schritten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{8}$ das Off-Target und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ das Startfeld.

- iii. Wo befindet sich der Wirkstoff nach zehn Schritten? Das Baumdiagramm in Abbildung 5 stellt alle Ereignisse, die eintreten können, dar. Der Wirkstoff erreicht das Target mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) \right) \right)$$

Durch geschicktes Ausklammern erhältst du:

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{31}{16} \approx 0,48$$

Mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erreicht der Wirkstoff das Off-Target.

Im Labyrinth des Körpers

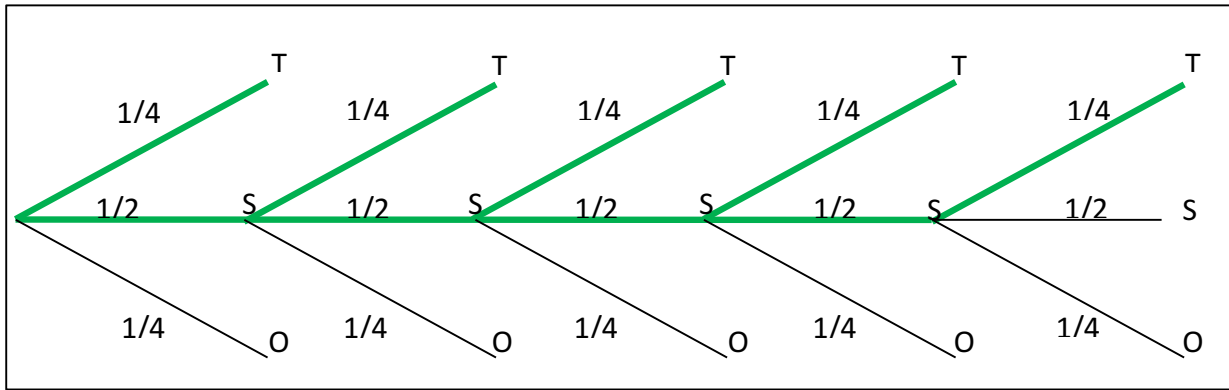


Abbildung 5: Verkürztes Baumdiagramm für 10 Schritte. Jede Stufe des Baumdiagramms entspricht zwei Schritten.

- iv. Bereits bei 10 Schritten erreicht der Wirkstoff nahezu mit Wahrscheinlichkeit 0,5 sowohl Target als auch Off-Target (vgl. Aufgabenteil a) iii.). Du kannst dir anhand des Baumdiagramms in Abbildung 5 überlegen, dass sich die Wahrscheinlichkeit, das Target (Off-Target) zu erreichen, mit wachsender Schrittzahl immer weiter dem Wert 0,5 annähert. Insbesondere wird der Wirkstoff sicher irgendwann entweder das Target oder das Off-Target erreichen.
- b) Startet der Wirkstoff ein Feld weiter links, so bewegt er sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Schritt nach links und erreicht damit das Target. Oder der Wirkstoff bewegt sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Schritt nach rechts und landet genau in der Mitte zwischen Target und Off-Target. Aus Aufgabenteil a) iv. weißt du, dass der Wirkstoff von der Mitte aus mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das Target (irgendwann) erreicht. Der Wirkstoff erreicht das Target also mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Entsprechend erreicht der Wirkstoff das Off-Target (irgendwann) mit der Wahrscheinlichkeit 0,25.



Abbildung 6: Der Wirkstoff startet ein Feld weiter links.

Im Labyrinth des Körpers

- c) Startet der Wirkstoff ein Feld weiter rechts, so bewegt er sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Schritt nach rechts und erreicht damit das Off-Target. Oder der Wirkstoff bewegt sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Schritt nach links und landet genau in der Mitte zwischen Target und Off-Target. Aus Aufgabenteil a) weißt du, dass der Wirkstoff von der Mitte aus mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das Target (irgendwann) erreicht. Der Wirkstoff erreicht das Target also mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Entsprechend erreicht der Wirkstoff das Off-Target (irgendwann) mit der Wahrscheinlichkeit 0,75.