Auf der Suche nach der kürzesten Tour

Lösung:

a) Eine Tour kannst du mit einer Liste beschreiben, welche die Reihenfolge angibt, in der die Kunden abgefahren werden. So beschreibt die Liste (H,K,I,F,B,D,A,C,E,G,J) beispielsweise die Tour, welche in Abbildung 9 dargestellt ist. Diese Tour führt von der Pizzeria P zum ersten Kunden H, danach zum zweiten Kunden K,... zuletzt zum Kunden J und endet in der Pizzeria P.

Es gibt so viele verschiedene Touren wie es verschiedene Listen gibt. Wie viele verschiedene Listen gibt es? Für den ersten Kunden hast du 11 Auswahlmöglichkeiten. Ist dieser festgelegt, bleiben für den zweiten Kunden 10 Auswahlmöglichkeiten usw. Für die Auswahl aller 11 Kunden hast du

$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Auswahlmöglichkeiten. Hierfür schreibt man auch kurz 11! (gesprochen „11 Fakultät“). Mit dem Taschenrechner berechnest du $11! = 39.916.800$.

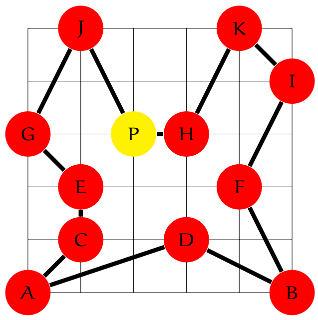

Abbildung 9: Diese Tour lässt sich mit der Liste (H,K,I,F,B,D,A,C,E,G,J) beschreiben.

b) Für ein Beispiel mit 50 Kunden erhältst du entsprechend

$$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

unterschiedliche Touren. Du kannst leicht abschätzen, dass es mindestens 42 Stellen sein müssen: Das Produkt 50 enthält 41 Faktoren, die größer oder gleich 10 sind. Mit dem Taschenrechner findest du die genaue Anzahl Stellen: $50! \approx 3,04 \cdot 10^{64}$. Die Zahl hat also 65 Stellen.

c) Der Computer muss die Längen aller Touren berechnen. Man kann sich die Hälfte dieser Berechnungen sparen, wenn man bemerkt, dass jede Tour in ihrer Länge mit derjenigen Tour übereinstimmt, welche die Kunden in der exakt umgekehrten Reihenfolge abfährt. Daher braucht der Computer bei 11 Kunden "nur"

$$\frac{11!}{2} = 19.958.400$$

verschiedene Touren zu untersuchen. Für die Berechnung der Länge benötigt der Computer pro Tour etwa 11 FLOPS. Insgesamt sind also etwa

$$11 \cdot 19.958.400 \approx 11 \cdot 20 \cdot 10^6 = 220 \cdot 10^6 = 0,22 \cdot 10^9$$

FLOPS nötig, was 0,22 Giga-FLOPS entspricht. Aktuelle Computer können ca. 3 Giga-FLOPS pro Sekunde durchführen. Der Computer benötigt also etwa $0,22 : 3 \approx 0,07$ Sekunden, um die kürzeste Tour für 11 Kunden so zu bestimmen. Übrigens zeigt Abbildung 9 eine optimale Tour!

Autoren: Max Klimm, TU Berlin, Katharina Skutella, HU Berlin

Für ein Beispiel mit 50 Kunden erhältst du entsprechend

$$\frac{50!}{2} \approx 1,52 \cdot 10^{64}$$

verschiedene Touren. Für deren Berechnung sind etwa $50 \cdot 1,52 \cdot 10^{64} = 7,6 \cdot 10^{65}$ FLOPS, also $7,6 \cdot 10^{56}$ Giga-FLOPS nötig. Der Computer benötigt also

$$7,66 \cdot 10^{56} : 3 \approx \; 2,5 \cdot 10^{56}$$

Sekunden, um die kürzeste Tour für 50 Kunden so zu bestimmen. Das sind etwa $8 \cdot 10^{48}$ Jahre!

Die optimale Lösung durch Ausprobieren aller möglichen Touren zu bestimmen, ist kein effizientes Verfahren, denn die Anzahl Touren wächst sehr schnell mit der steigenden Anzahl Kunden: Bei 11 Kunden benötigt der Computer lediglich etwa $0,07$ Sekunden, bei 50 Kunden bereits $8 \cdot 10^{48}$ Jahre! Das ist ein unvorstellbar langer Zeitraum, gemessen daran, dass die Erde erst vor etwa 4,6 Milliarden Jahren (also $4,6 \cdot 10^{9}$ Jahren) entstanden sein soll. Der rasante Anstieg der Rechenzeit ist ein Phänomen, das häufig als kombinatorische Explosion bezeichnet wird.
Tatsächlich gibt es ein Verfahren, das mit deutlich geringerem Rechenaufwand eine kürzeste Tour berechnet. Dieses Verfahren bestimmt in einem ersten Durchlauf für jeden der 50 Kunden jeweils die Entfernung zur Pizzeria. In einem zweiten Durchlauf bestimmt das Verfahren für jeden der 50 Kunden jeweils alle kürzesten Weg, die über genau **einen** weiteren Kunden zur Pizzeria führen. Im dritten Durchlauf bestimmt das Verfahren für jeden der 50 Kunden jeweils alle kürzesten Wege, die über genau **zwei** weitere Kunden zur Pizzeria führen usw. Im letzten Durchlauf bestimmt das Verfahren für jeden der 50 Kunden jeweils den kürzesten Weg zur Pizzeria, der unterwegs alle anderen **49** Kunden besucht. Diese im letzten Durchgang berechneten 50 kürzesten Wege lassen sich jeweils durch eine weitere Verbindungsstrecke zu einer Tour ergänzen. Darunter ist auch die optimale Tour. Der Trick ist, dass dieses Verfahren in jedem Durchlauf die Berechnungen des vorherigen Durchlaufs verwenden kann und dadurch Zeit spart. Ein solches Verfahren nennt man in der Mathematik und in der Informatik auch ein „rekursives Verfahren“. Der Rechenaufwand beträgt bei 50 Kunden etwa $50^2 \cdot 2^{49} \approx 1,4 \cdot 10^{18}$ FLOPS, wofür etwa $4,7 \cdot 10^{8}$ Sekunden nötig sind. Das sind knapp 14 Jahre. Aber Pizzalieferanten liefern ja in der Regel keine 50 Pizzen auf einmal aus!